BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2015*

УДК 517.983.53

О ПОЛНОТЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

Ф.С.ЛАЧЫНОВА
Бакинский Государственный Университет
Fidashka707@gmail.com

В работе рассматривается на полуоси параболическое операторно-дифференциальное уравнение третьего порядка с кратной характеристикой. Получены достаточные условия на операторные коэффициенты уравнения, при которых начально-краевая задача для него регулярно разрешима. Установлена полнота убывающих элементарных решений исследуемого операторно-дифференциального уравнения.

Ключевые слова: начально-краевая задача, операторно-дифференциальное уравнение, регулярная разрешимость, собственные и присоединенные вектора, элементарные решения.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство.

Рассмотрим в H следующий операторный пучок с параболической главной частью, имеющей кратную характеристику:

$$P(\lambda)=(\lambda E + A)^3 + \lambda^2 A_1 + \lambda A_2, \tag{1}$$

где E - единичный оператор, A - самосопряженный положительно-определенный оператор с вполне непрерывным обратным, т.е. $A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$, а A_1, A_2 - линейные операторы такие, что $A_s A^{-s}$, $s=1,2$ ограничены в H, т.е. $A_s A^{-s} \in L(H)$, $s=1,2$.

Обозначим через H_γ $(\gamma \ge 0)$ шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором A, т.е. $H_\gamma = Dom(A^\gamma)$, $(x,y)_{H_\gamma} = (A^\gamma x, A^\gamma y)_H$, $x,y \in Dom(A^\gamma)$. При $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$, $(x,y)_{H_0} = (x,y)_H$, $x,y \in H$.

Положим

$$L_2(R_+;H)=\left\{u(t): \|u\|^2_{L_2(R_+;H)}=\int_0^{+\infty}\|u(t)\|^2_H\,dt<+\infty\right\},$$

$$W_2^3(R_+;H)=\left\{u(t): \|u\|^2_{W_2^3(R_+;H)}=\int_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^3u(t)}{dt^3}\right\|^2_H+\|A^3u(t)\|^2_H\right)dt<+\infty\right\}$$

(см. [1]), где $R_+=[0,+\infty)$. Здесь и далее производные понимаются в смысле теории распределений.

С пучком (1) свяжем начально-краевую задачу

$$P(d/dt)u(t)=0,\ t\in R_+, \tag{2}$$

$$u(0)=\varphi_0,\ \frac{du(0)}{dt}=\varphi_1,\ \frac{d^2u(0)}{dt^2}=\varphi_2, \tag{3}$$

где $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$, $\varphi_j\in H_{5/2-j}$, $j=0,1,2$.

Определение 1. *Если существует вектор-функция* $u(t)\in W_2^3(R_+;H)$, *удовлетворяющая уравнению* $P(d/dt)u(t)=0$ *почти всюду в* R_+, *то ее будем называть регулярным решением уравнения (2).*

Определение 2. *Если при любых* $\varphi_j\in H_{5/2-j}$, $j=0,1,2$, *существует регулярное решение* $u(t)$ *уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям (3) в смысле сходимостей*

$$\lim_{t\to 0}\|u(t)-\varphi_0\|_{H_{5/2}}=0,\ \lim_{t\to 0}\left\|\frac{du(t)}{dt}-\varphi_1\right\|_{H_{3/2}}=0,\ \lim_{t\to 0}\left\|\frac{d^2u(t)}{dt^2}-\varphi_2\right\|_{H_{1/2}}=0$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^3(R_+;H)}\le const\left(\|\varphi_0\|_{H_{5/2}}+\|\varphi_1\|_{H_{3/2}}+\|\varphi_2\|_{H_{1/2}}\right),$$

то начально-краевая задача (2), (3) называется регулярно разрешимой.

Если λ_n $(\operatorname{Re}\lambda_n<0)$ - собственное значение, а $\psi_{0,n},\psi_{1,n},...,\psi_{m,n}$ - собственные и присоединенные вектора (см. [2]) пучка (1), отвечающие λ_n, тогда вектор-функции

$$u_{h,n}(t)=e^{\lambda_n t}\left(\frac{t^h}{h!}\psi_{0,n}+\frac{t^{h-1}}{(h-1)!}\psi_{1,n}+...+\frac{t}{1!}\psi_{h-1,n}+\psi_{h,n}\right),\ h=0,1,...,m,$$

принадлежат $W_2^3(R_+;H)$ и удовлетворяют уравнению (2). Эти решения называются убывающими элементарными решениями уравнения (2). С помощью их определим вектор

$$\tilde{\psi}_{h,n}=\left\{\psi^{(0)}_{h,n},\psi^{(1)}_{h,n},\psi^{(2)}_{h,n}\right\}\in\tilde{H}\equiv H_{5/2}\oplus H_{3/2}\oplus H_{1/2},$$

где $\psi_{h,n}^{(j)} \equiv \frac{d^j}{dt^j} u_{h,n}(t)\Big|_{t=0}$, $j=0,1,2$, $h=0,1,\ldots,m$. Систему $\{\widetilde{\psi}_{h,n}\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть производной цепочкой собственных и присоединенных векторов пучка (1), порожденной краевой задачей (2), (3).

Рассматриваемый в настоящей работе класс операторно-дифференциальных уравнений охватывает параболические уравнения с действительными кратными характеристиками. К таким параболическим уравнениям приводит математическое описание многих сложных явлений в современном естествознании и технике. Такие параболические уравнения встречаются, например, в теории тепло- и массопереноса при описании процессов сушки и охлаждения, в теории ядерных цепных реакций при изучении процесса замедления нейтронов и в других задачах.

В работе в терминах операторных коэффициентов пучка (1) получены достаточные условия, при которых начально-краевая задача (2), (3) имеет единственное регулярное решение из пространства $W_2^3(R_+;H)$ при любых $\varphi_j \in H_{5/2-j}$, $j=0,1,2$. При этом в пространстве всех таких решений доказывается полнота системы убывающих элементарных решений уравнения (2). Отметим, что подобные вопросы рассмотрены в работах [3-8] при изучении различного рода краевых задач для эллиптических и квазиэллиптических операторно-дифференциальных уравнений. Среди работ, посвященных изучению полноты убывающих элементарных решений для параболических операторно-дифференциальных уравнений, укажем работу [6].

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* A *- самосопряженный положительно-определенный оператор,* $A_s A^{-s} \in L(H)$, $s=1,2$, *и выполняется неравенство*

$$\left\|A_1 A^{-1}\right\|_{H\to H} + \left\|A_2 A^{-2}\right\|_{H\to H} < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда начально-краевая задача (2), (3) регулярно разрешима.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $A_1 = A_2 = 0$. Тогда нетрудно установить, что начально-краевая задача

$$\left(-\frac{d}{dt}+A\right)\left(\frac{d}{dt}+A\right)^2 u(t)=0,\ t\in R_+, \qquad (4)$$

$$u(0)=\varphi_0,\ \frac{du(0)}{dt}=\varphi_1,\ \frac{d^2u(0)}{dt^2}=\varphi_2 \qquad (5)$$

регулярно разрешима. Действительно, общее решение уравнения (4) из пространства $W_2^3(R_+;H)$ имеет следующий вид:

$$u_0(t)=e^{-tA}\xi_0+tAe^{-tA}\xi_1+t^2A^2e^{-tA}\xi_2,$$
где $\xi_i\in Dom\left(A^{5/2-i}\right),\ i=0,1,2$ (см. [1]). В силу условий (5) имеем

$$\begin{cases} u_0(0)=\xi_0=\varphi_0, \\ \dfrac{du_0(0)}{dt}=-A\xi_0+A\xi_1=\varphi_1, \\ \dfrac{d^2u_0(0)}{dt^2}=A^2\xi_0-2A^2\xi_1+2A^2\xi_2=\varphi_2. \end{cases}$$

Из этой системы получим

$$\xi_1=A^{-1}\varphi_1+\varphi_0,\ \ \xi_2=\frac{1}{2}A^{-2}\varphi_2+A^{-1}\varphi_1+\frac{1}{2}\varphi_0.$$

С другой стороны,

$$\|u_0(t)\|_{W_2^3(R_+;H)}=\left\|e^{-tA}\xi_0+tAe^{-tA}\xi_1+t^2A^2e^{-tA}\xi_2\right\|_{W_2^3(R_+;H)}\le$$
$$\le const\|\xi_0\|_{H_{5/2}}+const\|\xi_1\|_{H_{3/2}}+const\|\xi_2\|_{H_{1/2}}\le$$
$$\le const\left(\|\varphi_0\|_{H_{5/2}}+\|\varphi_1\|_{H_{3/2}}+\|\varphi_2\|_{H_{1/2}}\right).$$

Таким образом, задача (4), (5) регулярно разрешима.

Далее предположим хотя бы один из операторов $A_j,\ j=1,2$, отличен от нуля. Тогда регулярное решение начально-краевой задачи (2), (3) будем искать в виде $u(t)=u_0(t)+v(t)$, где $u_0(t)$ - регулярное решение задачи (4), (5), а $v(t)\in W_2^3(R_+;H)$. В этом случае начально-краевую задачу (2), (3) можно свести к следующей относительно $v(t)$ задаче:

$$P(d/dt)v(t)=f(t), \tag{6}$$

$$v(0)=0,\ \frac{dv(0)}{dt}=0,\ \frac{d^2v(0)}{dt^2}=0, \tag{7}$$

где $f(t)\in L_2(R_+;H)$. Действительно, в силу того, что

$$u_0(t)=e^{-tA}\xi_0+tAe^{-tA}\xi_1+t^2A^2e^{-tA}\xi_2,$$

при этом

$$\xi_0=\varphi_0,\ \ \xi_1=A^{-1}\varphi_1+\varphi_0,\ \ \xi_2=\frac{1}{2}A^{-2}\varphi_2+A^{-1}\varphi_1+\frac{1}{2}\varphi_0,$$

получим:

$$v(t)=u(t)-u_0(t),$$
$$v(0)=u(0)-u_0(0)=\varphi_0-\varphi_0=0,$$

$$\frac{dv(0)}{dt}=\frac{du(0)}{dt}-\frac{du_0(0)}{dt}=\varphi_1-\varphi_1=0,$$

$$\frac{d^2v(0)}{dt^2}=\frac{d^2u(0)}{dt^2}-\frac{d^2u_0(0)}{dt^2}=\varphi_2-\varphi_2=0.$$

Тогда

$$P(d/dt)v(t)=-P_0(d/dt)u_0(t)-P_1(d/dt)u_0(t),$$

$$v(0)=0,\ \frac{dv(0)}{dt}=0,\ \frac{d^2v(0)}{dt^2}=0,$$

где

$$P_0(\lambda)=(\lambda E+A)^3,\ P_1(\lambda)=\lambda^2A_1+\lambda A_2.$$

Так как $u_0(t)$ есть регулярное решение уравнения

$$P_0(d/dt)u_0(t)=0,$$

то

$$P(d/dt)v(t)=-P_1(d/dt)u_0(t),$$

$$v(0)=0,\ \frac{dv(0)}{dt}=0,\ \frac{d^2v(0)}{dt^2}=0.$$

А поскольку

$$f(t)=-P_1(d/dt)u_0(t)=-A_1\frac{d^2u_0(t)}{dt^2}-A_2\frac{du_0(t)}{dt}=$$

$$=-A_1\left[A^2e^{-tA}\xi_0+A^2(-2E+tA)e^{-tA}\xi_1+A^2\left(2E-4tA+t^2A^2\right)e^{-tA}\xi_2\right]-$$

$$-A_2\left[-Ae^{-tA}\xi_0+A(E-tA)e^{-tA}\xi_1+tA^2(2E-tA)e^{-tA}\xi_2\right]=$$

$$=\left[-A_1A^{-1}+A_2A^{-2}\right]A^3e^{-tA}\xi_0-$$

$$-\left[A_1A^{-1}(-2E+tA)+A_2A^{-2}(E-tA)\right]A^3e^{-tA}\xi_1-$$

$$-\left[A_1A^{-1}\left(2E-4tA+t^2A^2\right)+A_2A^{-2}\left(2tA-t^2A^2\right)\right]A^3e^{-tA}\xi_2,$$

то функция $f(t)\in L_2(R_+;H)$.

В результате, остается показать регулярную разрешимость задачи (6), (7), что, в свою очередь, установлено в работе [9] при выполнении условий теоремы. Теорема доказана.

Далее под обозначением σ_p понимается класс Шаттена-Неймана [10].

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть A - самосопряженный положительно-определенный оператор, $A^{-1}\in\sigma_\infty(H)$, $A_sA^{-s}\in L(H)$, $s=1,2$, и выполняется неравенство*

$$\left\| A_1 A^{-1} \right\|_{H \to H} + \left\| A_2 A^{-2} \right\|_{H \to H} < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда если имеет место одно из следующих условий:

1) $A^{-1} \in \sigma_p$, $0 < p \le 1$;

2) $A^{-1} \in \sigma_p$, $0 < p < \infty$, $A_s A^{-s} \in \sigma_\infty(H)$, $s = 1,2$,

то система убывающих элементарных решений уравнения (2) полна в пространстве всех его регулярных решений.

Доказательство. Пусть $W(P)$ - множество регулярных решений уравнения (2). По теоремам о промежуточных производных и о следах [1, гл.1] множество $W(P)$ является замкнутым подпространством пространства $W_2^3(R_+; H)$.

Пусть $u(t) \in W(P)$. Тогда ясно, что $u(t) \in W_2^3(R_+; H)$ и $u(0) = \varphi_0 \in H_{5/2}$, $\dfrac{du(0)}{dt} = \varphi_1 \in H_{3/2}$, $\dfrac{d^2u(0)}{dt^2} = \varphi_2 \in H_{1/2}$. Следовательно, в условиях теоремы $u(t)$ будет регулярным решением начально-краевой задачи (2), (3).

Согласно теореме о следах [1, гл.1] для любой функции $u(t) \in W_2^3(R_+; H)$ справедлива оценка:

$$\left\| A^{5/2} u(0) \right\|_H + \left\| A^{3/2} \frac{du(0)}{dt} \right\|_H + \left\| A^{1/2} \frac{d^2u(0)}{dt^2} \right\|_H =$$

$$= \left\| u(0) \right\|_{H_{5/2}} + \left\| \frac{du(0)}{dt} \right\|_{H_{3/2}} + \left\| \frac{d^2u(0)}{dt^2} \right\|_{H_{1/2}} \le const \left\| u \right\|_{W_2^3(R_+;H)}.$$

С другой стороны, по теореме 1 из единственности решений краевой задачи (2), (3) имеем

$$\left\| u \right\|_{W_2^3(R_+;H)} \le const \left(\left\| \varphi_0 \right\|_{H_{5/2}} + \left\| \varphi_1 \right\|_{H_{3/2}} + \left\| \varphi_2 \right\|_{H_{1/2}} \right). \qquad (8)$$

Отметим, что в работе [11] при выполнении условий теоремы установлена полнота $\left\{ \tilde{\psi}_{h,n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ производной цепочки собственных и присоединенных векторов пучка (1), порожденной краевой задачей (2), (3), в пространстве $\tilde{H}$. А поскольку система $\left\{ \tilde{\psi}_{h,n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $\tilde{H}$, то для заданного $\varepsilon > 0$ существуют число N и числа $c_{h,n}^N$ такие, что

$$\left\| \varphi_0 - \sum_{n=1}^{N} \sum_{h} c_{h,n}^N \psi_{h,n}^{(0)} \right\|_{H_{5/2}} < \varepsilon, \qquad (9)$$

$$\left\| \varphi_1 - \sum_{n=1}^{N} \sum_{h} c_{h,n}^{N} \psi_{h,n}^{(1)} \right\|_{H_{3/2}} < \varepsilon, \tag{10}$$

$$\left\| \varphi_2 - \sum_{n=1}^{N} \sum_{h} c_{h,n}^{N} \psi_{h,n}^{(2)} \right\|_{H_{1/2}} < \varepsilon \cdot \tag{11}$$

Поскольку $\psi_{h,n}^{(j)} = \frac{d^j}{dt^j} u_{h,n}(t)\Big|_{t=0}$ и $\varphi_j = \frac{d^j}{dt^j} u(t)\Big|_{t=0}$, $j = 0,1,2$, то для решения

$$u(t) - \sum_{n=1}^{N} \sum_{h} c_{h,n}^{N} u_{h,n}(t)$$

в силу неравенства (8) имеем

$$\left\| u(t) - \sum_{n=1}^{N} \sum_{h} c_{h,n}^{N} u_{h,n}(t) \right\|_{W_2^3(R_+;H)} \le$$

$$\le const \sum_{j=0}^{2} \left\| \varphi_j - \sum_{n=1}^{N} \sum_{h} c_{h,n}^{N} \psi_{h,n}^{(j)} \right\|_{H_{5/2-j}} . \tag{12}$$

А если принять во внимание (9), (10) и (11), то из неравенства (12) получаем:

$$\left\| u(t) - \sum_{n=1}^{N} \sum_{h} c_{h,n}^{N} u_{h,n}(t) \right\|_{W_2^3(R_+;H)} \le \varepsilon \cdot const < \varepsilon_1 \cdot$$

Последнее неравенство означает полноту системы убывающих элементарных решений в пространстве $W(P)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. М.В. Келдыш. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи математических наук, 1971, т. 26, № 4 (160), с. 15-41.
3. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Дифференциальные уравнения, 1992, т. 28, № 4, с. 651-661.
4. Мирзоев С.С., Гулиева Ф.А. О полноте элементарных решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами // Математические заметки, 2009, т. 86, № 5, с. 797-800.
5. Aliev A.R., Mohamed A.S. Completeness of Elementary Solutions for a Class of Fourth Order Operator-Differential Equations // News of Baku University, Ser. of Phys.-Math. Sciences, 2011, No. 4, p.p. 24-28.
6. Гулиева Ф.А. Исследование полноты собственных и присоединенных элементов операторного пучка второго порядка. Автореферат диссертации на соиск. уч. ст. доктора философии по математике, Баку, Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, 2011, 19 с.
7. Elbably A.L. On the Completeness of a System of Elementary Solutions for an Operator-Differential Equation // Transactions of NAS of Azerbaijan, Ser. of Phys.-Tech. and Math. Sciences, v. 32, No. 4, 2012, p.p. 35-42.

8. Керимов К.А., Мирзоев С.С. Об одной задаче для операторно-дифференциального уравнения второго порядка с нелокальным краевым условием // Математические заметки, 2013, т. 94, № 3, с. 349-353.
9. Лачынова Ф.С. Об условиях разрешимости начально-краевой задачи для одного класса параболических операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-матем. наук, 2013, № 3, с. 48-57.
10. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965, 448 с.
11. Лачынова Ф.С. О полноте производной цепочки операторного пучка третьего порядка с параболической главной частью / Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвящ. 55-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана, 15-16 мая 2014 г., Баку, с. 220-221.

BAŞ HİSSƏSİ PARABOLİK OLAN ÜÇTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİYİN ELEMENTAR HƏLLƏRİNİN TAMLIĞI HAQQINDA

F.S. LAÇINOVA

XÜLASƏ

İşdə yarımoxda təkrarlanan xarakteristikalı üçtərtibli parabolik operator-diferensial tənliyə baxılır. Tənliyin operator əmsalları üzərinə elə kafi şərtlər tapılmışdır ki, həmin şərtlər daxilində başlanğic sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır. Tədqiq olunan operator-diferensial tənliyin azalan elementar həllərinin tamlığı isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: başlanğic sərhəd məsələsi, operator-diferensial tənlik, requlyar həll olunma, məxsusi və qoşulmuş vektorlar, elementar həllər.

COMPLETENESS OF ELEMENTARY SOLUTIONS OF A THIRD-ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION WITH A PARABOLIC PRINCIPAL PART

F.S. LACHINOVA

SUMMARY

In this paper, a third-order parabolic operator-differential equation with multiple characteristics is considered on the semi-axis. We obtain sufficient conditions on the operator coefficients of the equation under which the initial boundary-value problem is regular solvable. We establish the completeness of the decreasing elementary solutions of the operator-differential equation under consideration.

Key words: initial boundary-value problem, operator-differential equation, regular solvability, eigen and adjoint vectors, elementary solutions.

Поступило в редакцию: 16.03.2015 г.
Подписано к печати: 18.06.2015 г.